١ – ١٩– جداء اربعة اشعة يمكننا الان بسهولة الحصول على جداءات لاربعة اشعة بالاستفادة من جداءات ثلاثة اشعة .

$$(1-19,1) \quad (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad (١)$$

ولبرهان هذه المتطابقة والتي تسمى متطابقة لاغرانج نفرض $\vec{c} \wedge \vec{d} = \vec{f}$ فيكون :

$$\begin{aligned}(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) &= (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{f} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{f}) \\ &= \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{f}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d})) \\ &= \vec{a} \cdot [(\vec{b} \cdot \vec{d}) \vec{c} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{d}] \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})\end{aligned}$$

وهو المطلوب .

واذا جعلنا في $(1-19,1)$ $\vec{a} = \vec{c}$ و $\vec{d} = \vec{b}$ فاننا نحصل على

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{c}\wedge\vec{d})=(\vec{a},\vec{b},\vec{d})\vec{c}-(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d} \qquad (٢)$$

$$=(\vec{a},\vec{c},\vec{d})\vec{b}-(\vec{b},\vec{c},\vec{d})\vec{a} \qquad (1-19,2)$$

لبرهان الجزء الاول من هذه المتطابقة نضع $\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{f}$ فنجد :

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{c}\wedge\vec{d})=\vec{f}\wedge(\vec{c}\wedge\vec{d})$$
$$=(\vec{f}\cdot\vec{d})\vec{c}-(\vec{f}\cdot\vec{c})\vec{d}$$
$$=(\vec{a},\vec{b},\vec{d})\vec{c}-(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d}$$

ولبرهان الجزء الثاني نضع $\vec{c}\wedge\vec{d}=\vec{g}$ ونتابع كما فعلنا في الجزء الاول .

نستنتج من $(1-19,2)$ ان :

$$\vec{a}(\vec{b},\vec{c},\vec{d})-\vec{b}(\vec{c},\vec{d},\vec{a})+\vec{c}(\vec{d},\vec{a},\vec{b})-\vec{d}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\vec{0} \qquad (1-19,3)$$

وتدل هذه العلاقة على ان اية اربعة اشعة في الفراغ ثلاثي البعد مرتبطة خطيا (لان انعدام امثال $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ و $\vec{d}$ بآن واحد يقتضي ان تكون موازية لمستو واحد ، وبالتالي فان اية ثلاثة منها مرتبطة خطيا) .

واذا كانت الاشعة $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ، على سبيل المثال ، مستقلة خطيا اى اذا كان $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\neq 0$ فاننا نستطيع تقسيم طرفي المتطابقة $(1-19,3)$ فنحصل على الشعاع $\vec{d}$ على شكل تركيب خطي من الاشعة $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$.

<u>١ - ٢٠ - التقسيم الشعاعي</u> . لنفرض $\vec{a}$ و $\vec{c}$ شعاعين معطيين ولنبحث عن شعاع $\vec{b}$ يحقق :

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{c} \qquad (1-20,1)$$

تسمى عملية الحصول على حل لهذه المسألة <u>التقسيم الشعاعي</u> .

نرى انه اذا كان $\vec{c}$ يساوي الصفر فعندئذ ينبغي ان يكون $\vec{b}$ مساويا للصفر او موازيا للشعاع $\vec{a}$. واذا كان كل من $\vec{c}$ و $\vec{a}$ ،

يساوى الصفر فعندئذ يصلح اى شعاع $\vec{b}$ ان يكون حلا للمسألة . لذلك سنفرض فيمايلي ان $\vec{c}$ مختلف عن الصفر.

واذا نظرنا الى $(1-20,1)$ نرى انه يلزم ان يكون الشعاعان المعطيان $\vec{a}$ و $\vec{c}$ متعامدين ، والا فانه يستحيل ايجاد شعاع $\vec{b}$ لوضربناه خارجيا بشعاع مفروض $\vec{a}$ اعطى شعاعا غير متعامد مع $\vec{a}$.

لنفرض الان اننا استطعنا ان نجد حلين مختلفين b_1 و $\vec{b}_2$ للمعادلة $(1-20,1)$. اذن :

$$\vec{a} \wedge \vec{b}_1 = \vec{c}$$
$$\vec{a} \wedge \vec{b}_2 = \vec{c}$$

وبالطرح نجد :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b}_2 - \vec{b}_1) = \vec{0}$$

وبالتالي فان $\vec{b}_2 - \vec{b}_1$ و $\vec{a}$ متوازيان ، فهما مرتبطان خطيا . لذلك يوجد عدد حقيقي α بحيث يكون :

$$\vec{b}_2 - \vec{b}_1 = \alpha \vec{a}$$

او

$$\vec{b}_2 = \vec{b}_1 + \lambda \vec{a}$$

وبالعكس اذا كان $\vec{b}_1$ حلا و λ عدد حقيقي كيفي فان $\vec{b}_1 + \lambda \vec{a}$ حل. ويكفي لاثبات ذلك ان نعوض مباشرة في $(1-20,1)$.

نستنتج من ذلك انه اذا وجد حل $\vec{b}_1$ للمسألة فعندئذ يكون للمسألة عدد غير منته من الحلول هي $\vec{b}_1 + \lambda \vec{a}$.

وعلى هذا يكفي ان نبحث عن اى حل للمسألة ، ولنحاول من اجل ذلك ان نبحث عن حل $\vec{b}_1$ عمودى على $\vec{a}$. اى لنبحث عن $\vec{b}_1$ الذى يحقق

$$\vec{a} \cdot \vec{b}_1 = 0 , \qquad \vec{a} \wedge \vec{b}_1 = \vec{c} \qquad (1-20,2)$$

لنضرب طرفي المساواة اليمنى خارجيا بالشعاع $\vec{a}$ فنجد :

$$\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}_1) = \vec{a} \wedge \vec{c} \qquad (1-20,3)$$

واستنادا الى دستور الجداء الثلاثي الشعاعي يكون :

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}_1)\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{a})\vec{b}_1=\vec{a}\wedge\vec{c}$$

وبما ان $\vec{a}\cdot\vec{b}_1=0$ فاننا نحصل على :

$$-\vec{a}^2\vec{b}_1=\vec{a}\wedge\vec{c}$$

او :

$$\vec{b}_1=\frac{\vec{c}\wedge\vec{a}}{\vec{a}^2}$$

ان هذا الحل للمعادلة $(1-20,3)$ هو حل لـ $(1-20,2)$ كما نستطيع ان نثبت بالتعويض المباشر .

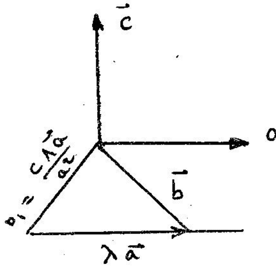
نلخص ماتقدم بما يلي :

(١) اذا لم يكن $\vec{c}=0$ فانه يلزم ويكفي كي يكون لمسألة التقسيم الشعاعي حل هو ان يكون $\vec{c}$ عموديا على $\vec{a}$.

(٢) ان الحل العام للمسألة هو :

$$\vec{b}=\frac{\vec{c}\wedge\vec{a}}{\vec{a}^2}+\lambda\vec{a}$$

حيث يكون λ عددا حقيقيا كيفيا .



ومن الشكل (١ ـ ١٨) نلاحظ انه اذا جعلنا مبدأ الشعاع $\vec{b}$ في نقطة ثابتة O فان الحل الهندسي لنهاية الشعاع $\vec{b}$ مستقيم يوازى الشعاع $\vec{a}$.

شكل (١ـ١٨)

١ـ٢١ ـ تمثيل الاشعة بثلاثيات عددية مرتبة .

نرغب فيما يلي ان نستخدم مجموعة محاور احداثية قائمة في الفراغ ثلاثي البعد. لنأخذ من اجل هذا الهدف ثلاثة اشعة وحدة $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ متعامدة مثنى وبحيث تشكل ثلاثية طردية . عندئذ

يكــون :

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik} \qquad (1-21,1)$$

حيث نعني بـ δ_{ik} دلتـا كرونكر التي تعرف بالشكل :

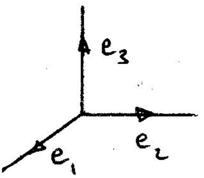
$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

ويكون كذلـك :

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \, , \quad \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \, , \quad \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \qquad (1-21,3)$$

ويمكن اختصار هذه المساويـات بـ :

$$\vec{e}_i \wedge \vec{e}_k = \vec{e}_l \qquad (1-21,4)$$



شكل (١- ١٩)

حيث تمثل i, k, l الاعداد $1, 2, 3$ على الترتيب او اية مجموعة اخرى تنشـأ عـــن $1, 2, 3$ بالتبديل الدوري .

وبمـا ان $\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 1$ فـاننـا نجد بضرب طرفي المساواة الاولـى من $(1-21,3)$ عدديـا بـ $\vec{e}_3$:

$$(\vec{e}_1 \, , \vec{e}_2 \, , \vec{e}_3) = 1$$

لـتكن O نقطة من الفراغ نجعلهـا مبدأ لـكل من $\vec{e}_1$ و $\vec{e}_2$ و $\vec{e}_3$ لنـأخذ بعدذلـك ثلاثة محاور ox و oy و oz تتفق (علـــى الترتيب) مع $\vec{e}_1$ و $\vec{e}_2$ و $\vec{e}_3$ بالحامل والجهة . تسمى هـــذه المجموعة من المحاور الثلاثة مجموعة محاور احداثية قائمة . ونطلـــق على O مبدأ الاحداثيات وعلـى $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ اشعة الوحدة لـلمحـــاور الاحداثية .

لـيكن $\vec{a}$ شعاعا من الفراغ ، ولـننظر في الاشعة $\vec{a}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ لـقد لاحظنـا في نـهاية البـند ١- ١٩ ان كل اربعة اشعة في الفــــراغ الثلاثي مرتبطة خطيـا . وبمـا ان الاشعة $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ مستقلة خطيـــا

سنرمز لاشعة الوحدة هذه في مواضع كثيرة من الحساب بـ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

فاننا نستطيع ان نعطي $\vec{a}$ على شكل تركيب خطي من الاشعة الثلاثة الاولى أى :

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i \qquad (1-21,6)$$

نسمي $\vec{e}_i$ قاعدة منظمة متعامدة ، ونسمي a_i مركبات الشعاع في هذه القاعدة (او في هذه المجموعة من المحاور الاحداثية) او احداثيات النقطة M (منتهى الشعاع $\vec{a}$) في هذه المجموعة .

ومن السهل ان نثبت ان اى شعاع في الفراغ يتمثل في مجموعة محاور احداثية بشكل وحيد بثلاثي عددى مرتب (مركبات الشعاع) .

لانه لو فرضنا جدلا ان الشعاع $\vec{a}$ يتعين بثلاثي آخر a'_i فانه يكون:

$$a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = a'_1 \vec{e}_1 + a'_2 \vec{e}_2 + a'_3 \vec{e}_3$$

وبالتالي :

$$(a_1 - a'_1)\vec{e}_1 + (a_2 - a'_2)\vec{e}_2 + (a_3 - a'_3)\vec{e}_3 = \vec{0}$$

وبما ان $\vec{e}_i$ مستقلة خطيا فان $a_i = a'_i$.

لنرتب مركبات الشعاع $\vec{a}$ تحت بعضها فنحصل على التمثيل التالي للشعاع $\vec{a}$.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

وفيما يلي نبين كيف تتم العمليات على الاشعة عندما تعطى هذه الاشعة بدلالة مركباتها .

<u>١ـ الجمع</u> : اذا كان :

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

فـــان :

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix}$$

ولبرهان ذلك نلاحظ :

$$\vec{a} + \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i + \sum_{i=1}^{3} b_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{3} (a_i + b_i) \vec{e}_i$$

واذا كان $\vec{AB}$ شعاعا ،واذا فرضنا ان احداثيات A (أى مركبات الشعاع $\vec{OA}$) هي a_i وان احداثيات B هي b_i فان :

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{OB} - \vec{OA} \\ &= \sum_{i=1}^{3} b_i \vec{e}_i - \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^{3} (b_i - a_i) \vec{e}_i \end{aligned}$$

فمركبات الشعاع $\vec{AB}$ هي $b_i - a_i$ ، أى أن :

$$\vec{AB} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{bmatrix}$$

وهكذا يتعين الشعاع (الطليق) بمركباته فقط في حين اذا اردنا ان نعين الشعاع المقيد $\vec{AB}$ فلا تكفي معرفة مركباته فقط بل ينبغي ان نعين كذلك مبدأه .

اما بالنسبة للشعاع المنزلق فاننا نحتاج لتعيينه معادلات حامله بالاضافة الى معرفة مركباته ، كما سنبين في بحث عزم شعاع .

٢- ضرب شعاع بعدد :

اذا كان : $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ فان $\lambda \vec{a} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{bmatrix}$

ذلك لان :

$$\lambda \vec{a} = \lambda \left(\sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i \right) = \sum_{i=1}^{3} (\lambda a_i) \vec{e}_i$$

٣- الجداء العددى:

اذا كان $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

فان

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \qquad (1-21,7)$$

ولبرهان ذلك نلاحظ :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} b_k \vec{e}_k \right)$$

وبما ان الضرب العددى يخضع للخاصة التوزيعية نستطيع ان نكتب :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} a_i b_k (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k)$$

وبالاستناد الى (1 - 21 , 1) نجد :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} a_i b_k \delta_{ki} = \sum_{l=1}^{3} a_l b_l$$

وهو المطلوب .

٤ــ الجداء الخارجي :

اذا كان $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

فان :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \qquad (1-21,8)$$

البرهان : ان :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \left(\sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i \right) \wedge \left(\sum_{k=1}^{3} b_k \vec{e}_k \right)$$

واستنادا الى الخاصة التوزيعية في الجداء الشعاعي نجد :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} a_i b_k (\vec{e}_i \wedge \vec{e}_k)$$

وبالاستفادة من $(1-21,3)$ نحصل على :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{e}_3$$

وهو المطلوب .

٥ ـ الجداء المختلط :

اذا كان $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ و $\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$

فان :

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$(1-21,9)$

ولاثبات ذلك نلاحظ ان :

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

وبالاعتماد على $(1-21,7)$ و $(1-21,8)$ يكون :

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_1 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} c_3$$

وهذه ليست الا رمز المعين الثلاثي المذكور ، وهو المطلوب .

ملاحظة :

لقد رمزنا للشعاع $\vec{a}$ الذى مركباته a_1, a_2, a_3 بالشكل

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

ولكننا قد نرمز له ايضا لتسهيل عملية الكتابة بالشكل $\vec{a}\ (a_1, a_2, a_3)$ ، وان كنا نفضل عند اجراء الحسابات ان نستعمل الشكل الاول .